Über Öffnungsmaße kinematisch erzeugter geschlossener Regelflächen

Müller, Hans Robert

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 40, 1988, S.7-16

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Über Öffnungsmaße kinematisch erzeugter geschlossener Regelflächen[1])

Von **Hans Robert Müller,** Braunschweig

(Eingegangen am 28.1.1988)

Öffnungsstrecken und Öffnungswinkel geschlossener Regelflächen erfuhren als einfache Ingetralinvarianten mehrfach, wie in [4], [5], [11], [12], Beachtung und geometrische Deutung im Rahmen der natürlichen Differentialgeometrie der Regelflächen von *E. Kruppa* [7], [8] und der Möglichkeit einer Spezialisierung auf die Geometrie der Raumkurven. Im Folgenden werden diese Öffnungsmaße im Zusammenhang mit einer Erzeugung der Regelfläche durch einen allgemeinen geschlossenen Zwanglauf (einparametrigen Bewegungsvorgang) behandelt. Hierbei werden neue geometrische Deutungen vorgenommen und Verbindungen zu einem zeitlich weit zurückliegenden Begriff von *G. Koenigs* hergestellt. Einige historische Bemerkungen zur Entwicklung dieser Integralvarianten werden eingeflochten.

I.

Eine gerichtete Gerade (Strahl) des dreidimensionalen euklidischen Raumes werde durch ihren Richtungsvektor $\mathbf{a}$ mit $\mathbf{a}^2 = 1$ und den Momentvektor $\bar{\mathbf{a}}$ bezüglich des Ursprungs eines rechtwinkeligen Achsenkreuzes erfaßt. Die sechs cartesischen Koordinaten von $\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}$ sind inhomogene (normierte) *Plücker*sche Linienkoordinaten, die der Bedingung $\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} = 0$ (*Plücker*sche Gleichung) genügen. Die Inzidenzbedingungen lauten $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{x} \times \mathbf{a}$ für einen Punkt $\mathbf{x}$ und der Geraden $(\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}})$ bzw. $\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{a}}\mathbf{b} = 0$ für zwei Gerade $(\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}})$ und $(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{b}})$.

Ein linearer Strahlkomplex (Gewinde) wird durch eine lineare homogene Gleichung in den Linienkoordinaten beschrieben:

$$\mathbf{a}\bar{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{a}}\mathbf{q} = 0. \tag{1}$$

Hierbei wurden die Koeffizienten zu Vektoren $\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}$ zusammengefaßt. Die Gewindeachse ist dann durch

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}, \; \bar{\mathbf{p}} = \frac{\bar{\mathbf{q}} - k\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} \text{ mit } |\mathbf{q}| = \sqrt{\mathbf{q}^2}, \; k = \frac{\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}}}{\mathbf{q}^2} \tag{2}$$

gegeben. k wird auch als Parameter oder Steigung des Gewindes bezeichnet. Für $\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}} = 0$ liegt ein ausgeartetes Gewinde (Strahlgebüsch) vor, das aus den ∞^3 Treffgeraden der Achse $(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}})$ besteht: $(\mathbf{a}\bar{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{a}}\mathbf{p} = 0)$.

[1]) Nach einem Vortrag, gehalten am 9.12.1968 an der TU Clausthal.

Bei einem Zwanglauf **B** im Raum, den wir uns doppelt überdeckt denken, werde der bewegte Körper und der damit starr verbundene Gangraum **R** durch ein orthonormiertes Dreibein $\{U;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$, das Gangkreuz erfaßt; entsprechend wird der fest gedachte Raum, der Rastraum **R**′ durch ein ebensolches Dreibein $\{U';\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2',\mathbf{e}_3'\}$, das Rastkreuz vertreten.

Die Abhängigkeit des Gangkreuzes vom Parameter t (Zeit) sei für $0 \leq t \leq T$ von genügend hoher Differentiationsordnung vorausgesetzt. Bei **B** beschreibt ein Punkt **x** eine Bahnkurve mit der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}_a$ (Absolutgeschwindigkeit) gegenüber **R**′ in der Form $\dot{\mathbf{x}}_a = \dot{\mathbf{x}}_f + \dot{\mathbf{x}}_r$. Hierbei bedeuten $\dot{\mathbf{x}}_r$ die Relativgeschwindigkeit von **x** gegenüber **R**, $\dot{\mathbf{x}}_f$ die Führungsgeschwindigkeit von **x**, also die Geschwindigkeit von **x** gegenüber **R**′, wenn **x** in **R** fest, also $\dot{\mathbf{x}}_r = 0$ gelten würde.

Zum Zeitpunkt t ist jeder Bewegungsvorgang **B** eine infinitesimale Schraubung von **R** gegenüber **R**′ um die Momentanachse $(\mathbf{p},\overline{\mathbf{p}})$, für die (2) gilt, wenn $(\mathbf{q},\overline{\mathbf{q}})$ die Momentanschraube darstellt. Der Punkt **x** besitzt dann die Führungsgeschwindigkeit

$$\dot{\mathbf{x}}_f = \dot{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{q}} + \mathbf{q} \times \mathbf{x}. \tag{3}$$

q fungiert als augenblicklicher *Darboux*scher Drehvektor, während $\overline{\mathbf{q}}$ den Vektor der Führungsgeschwindigkeit des Ursprungs U $(\mathbf{x}=0)$ und k den Schraubparameter bedeuten. Gemäß (1) ist mit **B** zum Zeitpunkt t in **R** ein Gewinde verbunden, dessen Strahlen in **R** fest sind.

Für eine beliebige (auch in **R** bewegte) Gerade $(\mathbf{a},\overline{\mathbf{a}})$ gilt: (Vgl. [9])

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{a}}_a = \dot{\mathbf{a}}_f + \dot{\mathbf{a}}_r,\ \dot{\overline{\mathbf{a}}}_a = \dot{\overline{\mathbf{a}}}_f + \dot{\overline{\mathbf{a}}}_r \ \text{ mit } \ \dot{\mathbf{a}}_f = \dot{\mathbf{a}} = \mathbf{q} \times \mathbf{a} \\ \dot{\overline{\mathbf{a}}}_f = \dot{\overline{\mathbf{a}}} = \overline{\mathbf{q}} \times \mathbf{a} + \mathbf{q} \times \overline{\mathbf{a}}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Im Verlaufe von **B** beschreibt die Momentanachse $(\mathbf{p},\overline{\mathbf{p}})$ in **R**, wie in **R**′ je eine Strahlfläche. Diese beiden Achsenflächen oder Axoide schroten – um mit *F. Reuleaux* zu sprechen – bei **B** aufeinander: Ihre gegenseitige Bewegung besteht aus einem Rollen und Gleiten längs der gemeinsamen Erzeugungen $(\mathbf{p},\overline{\mathbf{p}})$, längs der sie sich jeweils berühren. Bei dem Schroten haben die Axoide ein windschiefes Flächenelement, zwei infinitesimal benachbarte Erzeugende jeweils gemeinsam. Die Richtkegel (sphärische Bilder) der Axoide rollen gleitungslos aufeinander. Reine Schiebvorgänge mit $\mathbf{q}=0$ wollen wir außer acht lassen. Jede in **R** befestigte Gerade durchläuft bei **B** eine Regelfläche, die wir als Bahnfläche bezeichnen.

Der geometrische Begriff „Schraube" stammt von *Möbius* und *Grassmann*. In der Statik nannte *Plücker* das durch zwei Vektoren, wie $(\mathbf{q},\overline{\mathbf{q}})$ mit im allgemeinen $\mathbf{q}\overline{\mathbf{q}} \neq 0$, bestimmte geometrische Gebilde eine „Dyname", während man in der Kinematik im Anschluß an *R. S. Ball* von einer „Schraube" spricht.

II.

Sind die in $\mathbf{q},\overline{\mathbf{q}}$ auftretenden Funktionen periodisch mit der reellen Periode T, dann sprechen wir von einem geschlossenen Bewegungsvorgang $\mathbf{B}_0$. Die schrotenden Achsenflächen sind nun geschlossene Regelflächen, sie kehren bei $\mathbf{B}_0$ nach einer Parameteränderung um die Periode T wieder in ihre Ausgangslage zurück. Im Gangraum $\mathbf{R}$ befestigte Punkte bzw. Gerade besitzen dann geschlossene Bahnkurven bzw. geschlossene Bahnflächen.

W. Blaschke führte in einer Vorlesung – wohl 1944/45 – für solche geschlossenen Regelflächen den Begriff der *„Öffnung"* ein: Jede Querlinie (orthogonale Trajektorie) der Erzeugenden einer solchen Fläche schließt sich im allgemeinen nicht, sondern trifft nach einem Umlauf – entsprechend einer Parameteränderung um T – die Ausgangs-Erzeugende in einem vom Ausgangspunkt verschiedenen Punkt wieder. Der Abstand dieser Punkte ist eine Integralinvariante der geschlossenen Regelfläche und wird als Öffnung oder besser als *Öffnungsstrecke* bezeichnet. Vgl. hierzu auch [1], [3].[2])

Um die *Öffnungsstrecke* L_a *der Bahnfläche* zu berechnen, die bei $\mathbf{B}_0$ von einer Geraden $(\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}})$ des Gangraums $\mathbf{R}$ beschrieben wird, gehen wir von der Parameterdarstellung $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \lambda\mathbf{a}$ der Erzeugenden aus, wobei λ als reeller Parameter dient und $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{x} \times \mathbf{a}$ gilt. Der Punkt $\mathbf{x}$ bewegt sich bei $\mathbf{B}_0$ in $\mathbf{R}'$ auf einer Kurve, die als Leitlinie der geschlossenen Bahnfläche anzusehen ist. Für $\mathbf{a}\dot{\mathbf{y}} = 0$ durchläuft $\mathbf{y}$ eine Querlinie der Erzeugendenschar. Wegen (3), (4), sowie $\mathbf{a}\dot{\mathbf{a}} = 0$ ist

$$\mathbf{a}\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{a}\dot{\mathbf{x}} - \dot{\lambda} = \mathbf{a}\,(\bar{\mathbf{q}} + \mathbf{q} \times \mathbf{x}) - \dot{\lambda} = 0. \tag{5}$$

Daraus durch Integration über die Periode T

$$L_a = \oint \dot{\lambda}\, dt = \mathbf{a} \oint \bar{\mathbf{q}}\, dt + \bar{\mathbf{a}} \oint \mathbf{q}\, dt = \lambda_T - \lambda_0.$$

Hierbei wurde berücksichtigt, daß die Vektoren $\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}$ fest in $\mathbf{R}$ sind und $\mathbf{a}(\mathbf{q} \times \mathbf{x}) = \bar{\mathbf{a}}\mathbf{q}$ gilt. Die Integralvektoren

$$\mathbf{K} = \oint \mathbf{q}\, dt, \quad \bar{\mathbf{K}} = \oint \bar{\mathbf{q}}\, dt \tag{6}$$

hängen nur vom Bewegungsvorgang $\mathbf{B}_0$ ab und tauchten bereits 1889 bei *G. Koenigs* in [6] im Zusammenhang mit der Verallgemeinerung von Sätzen von *Pappos* und *Guldin* auf. Wir wollen daher $(\mathbf{K}, \bar{\mathbf{K}})$ als die *„Koenings-Schraube"* von $\mathbf{B}_0$ bezeichnen. Somit kann

$$L_a = \mathbf{a}\,\bar{\mathbf{K}} + \bar{\mathbf{a}}\,\mathbf{K} \tag{7}$$

als Moment der in $\mathbf{R}$ festen Geraden $(\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}})$ um die *Koenigs*schraube $(\mathbf{K}, \bar{\mathbf{K}})$ angesprochen werden.

Im besonderen schließen sich die Querlinien der Erzeugenden, wenn

$$L_a = \mathbf{a}\,\bar{\mathbf{K}} + \bar{\mathbf{a}}\,\mathbf{K} = 0 \tag{8}$$

ist. Alle Geraden von $\mathbf{R}$, die diese Bedingung erfüllen, gehören einem *linearen Strahlkomplex* an, den *Blaschke* bereits in [2] betrachtet hat. Zusammenfassend gilt also

[2]) Diese Invariante betrachtete bei Strahlkongruenzen bereits *E. Cartan* (Bull. Soc. Math. France (1896) *24*, 140–177).

Satz 1: *Mit jedem geschlossenen Zwanglauf* $\mathbf{B}_0$ *von* $\mathbf{R}$ *gegenüber* $\mathbf{R}'$ *ist eine Schraube* $(\mathbf{K},\overline{\mathbf{K}})$ *verbunden. Eine in* $\mathbf{R}$ *feste Gerade* $(\mathbf{a},\overline{\mathbf{a}})$ *durchläuft bei* $\mathbf{B}_0$ *eine geschlossene Bahnfläche, deren Öffnungsstrecke* $\mathrm{L_a}$ *das Moment der Geraden bezüglich der Koeningsschraube* $(\mathbf{K},\overline{\mathbf{K}})$ *ist.*
Alle Strahlen des mit $(\mathbf{K},\overline{\mathbf{K}})$ *verbundenen Gewindes bewegen sich auf Bahnflächen von verschwindender Öffnung* $\mathrm{L_0}=0$*; auf ihnen schließen sich die Querlinien.*

Etwas allgemeiner können wir nun nach allen Geraden $(\mathbf{a},\overline{\mathbf{a}})$ fragen, die in $\mathbf{R}$ fest sind und deren Bahnflächen die gleiche Öffnungsstrecke $\mathrm{L_a}=\text{konst.}\neq 0$ haben. Hierzu müssen wir nur (7) homogenisieren, um eine homogene Gleichung in *Plücker*schen Linienkoordinaten zu erhalten. Wegen $\mathbf{a}^2=1$ läßt sich statt (7) auch

$$\mathbf{a}^2\,\mathrm{L_a^2}=(\mathbf{a}\,\overline{\mathbf{K}}+\overline{\mathbf{a}}\,\mathbf{K})^2 \tag{9}$$

schreiben. Die ∞^3 Geraden von $\mathbf{R}$, die dieser Gleichung genügen, bilden einen *quadratischen Strahlkomplex.* Eine nähere Untersuchung zeigt, daß ihm die *Segre*sche Charakteristik [(22) 11] zukommt. Er ist als zyklisch zu bezeichnen, da die Komplexkegel Drehkegel sind und Kreise als ebene Komplexkurven auftreten. Die Singularitätenfläche besteht aus einem Zylinder zweiter Ordnung mit der Erzeugendenrichtung K; hinzu tritt noch die Fernebene als singuläres Gebilde.

Somit als Ergänzung der

Satz 1,1: *Alle Strahlen dieses zyklischen quadratischen Strahlkomplexes führen zu Bahnflächen konstanter Öffnungsstrecke.*

III.

Mit einer Regelfläche kann nach [1],[8] ein begleitendes orthonormiertes Dreibein verbunden werden: Es besteht aus den Vektoren $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ in Richtung der Erzeugenden, der Zentralnormalen bzw. der Zentraltangente und ist im Zentralpunkt (Striktionspunkt) $\mathbf{x}$ der betreffenden Erzeugenden $(\mathbf{a},\overline{\mathbf{a}})$ angeheftet. Für dieses Dreibein bestehen Ableitungsgleichungen

$$\dot{\mathbf{a}}=\varkappa\,\mathbf{b},\quad \dot{\mathbf{b}}=-\varkappa\,\mathbf{a}+\tau\,\mathbf{c},\quad \dot{\mathbf{c}}=-\tau\,\mathbf{b}. \tag{10}$$

Hierin sind $\varkappa$ und τ die natürliche Krümmung bzw. die natürliche Torsion im Sinne von *Kruppa* [8], wobei als Parameter die Bogenlänge der Striktionslinie gewählt wird. Für diese Kurve auf der von $(\mathbf{a},\overline{\mathbf{a}})$ bei $\mathbf{B}$ oder im besonderen $\mathbf{B}_0$ erzeugten Regelfläche, d.h. für den jeweiligen Zentralpunkt ist

$$\dot{\mathbf{a}}\,\dot{\mathbf{x}}=0 \tag{11}$$

kennzeichnend. Der Drall (Verteilungsparameter) der Regelfläche ist für die betrachtete Erzeugende

$$\mathrm{D}=\frac{1}{\mathrm{d}}=\frac{\dot{\mathbf{a}}\,\dot{\overline{\mathbf{a}}}}{\dot{\mathbf{a}}^2}=\frac{(\mathbf{a}\times\dot{\mathbf{a}})\,\dot{\mathbf{x}}}{\dot{\mathbf{a}}^2}=\frac{(\mathbf{a}\,\dot{\mathbf{a}}\,\dot{\mathbf{x}})}{\dot{\mathbf{a}}^2}. \tag{12}$$

Für Torsen (abwickelbare Regelflächen, Tangentenflächen einer Raumkurve) ist $D=0$ für alle Erzeugenden. Die Striktionslinie einer Torse ist deren Gratlinie. $d=0$ gilt für Zylinderflächen mit $\dot{\mathbf{a}}^2=0$.

Die Geraden der Richtung $\mathbf{b}$ bzw. $\mathbf{c}$ durch den Zentralpunkt erzeugen als begleitende Regelflächen die *Zentralnormalenfläche* $\mathfrak{B}$ bzw. die *Zentraltangentenfläche* $\mathfrak{C}$. Letztere wird auch als Striktionsband der Ausgangsregelfläche $\mathfrak{A}$ bezeichnet und berührt diese längs der gemeinsamen Striktionslinie. Vgl. [1], [8].

Für die von $(\mathbf{a},\bar{\mathbf{a}})$ bei $\mathbf{B}$ erzeugte Regelfläche $\mathfrak{A}$ gilt wegen (4)

$$\mathbf{b}=\frac{\dot{\mathbf{a}}}{|\dot{\mathbf{a}}|}=\frac{\mathbf{q}\times\mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{q}^2-(\mathbf{aq})^2}},\quad \mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\frac{\mathbf{q}-(\mathbf{aq})\mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{q}^2-(\mathbf{aq})^2}}. \tag{13}$$

Für den Drall ergibt sich nach [9]

$$D=\frac{\mathbf{q}\,\bar{\mathbf{q}}-(\mathbf{aq})\,(\mathbf{a}\bar{\mathbf{q}}+\bar{\mathbf{a}}\mathbf{q})}{\mathbf{q}^2-(\mathbf{aq})^2}. \tag{14}$$

Wir wollen nun die Öffnungsstrecken der begleitenden Regelflächen im Fall eines geschlossenen Bewegungsvorgangs $\mathbf{B}_0$ ermitteln.

1) Ein Punkt $\mathbf{y}$ der *Zentralnormalen* besitzt die Darstellung

$$\mathbf{y}=\mathbf{x}-\lambda\mathbf{b}, \tag{15}$$

wobei $\mathbf{x}$ Zentralpunkt der Erzeugenden $(\mathbf{a},\bar{\mathbf{a}})$ von $\mathfrak{A}$ sei. $\mathbf{y}$ beschreibt eine Querlinie auf $\mathfrak{B}$, wenn $\mathbf{b}\dot{\mathbf{y}}=\mathbf{b}\dot{\mathbf{x}}-\dot{\lambda}=0$ ist.

Wegen (11) und (13) ist $\mathbf{b}\dot{\mathbf{x}}=0$, also $\dot{\lambda}=0$, $\lambda=\text{konst}$. Die Öffnungsstrecke L_b der geschlossenen Zentralnormalenfläche $\mathfrak{B}$ ist somit

$$L_b=\oint\dot{\lambda}\,dt=\lambda_T-\lambda_0=0. \tag{16}$$

Satz 2: *Die Querlinien auf Zentralnormalenflächen geschlossener Regelflächen schließen sich, da die Öffnungsstrecken verschwinden.*

2) Für die *Zentraltangentenfläche* $\mathfrak{C}$ haben wir

$$\mathbf{y}=\mathbf{x}-\lambda\mathbf{c} \tag{17}$$

und bilden $\mathbf{c}\dot{\mathbf{y}}=\mathbf{c}\dot{\mathbf{x}}-\dot{\lambda}=0$.

In diesem Fall fungiert $\mathbf{x}$ auch als Zentralpunkt von $\mathfrak{C}$. Mit (3) und (13) gelangen wir wegen $\mathbf{a}(\mathbf{q}\times\mathbf{x})=(\mathbf{x}\times\mathbf{a})\mathbf{q}=\bar{\mathbf{a}}\mathbf{q}$ zu

$$\frac{\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}}-(\mathbf{aq})\,(\mathbf{a}\bar{\mathbf{q}}+\bar{\mathbf{a}}\mathbf{q})}{\sqrt{\mathbf{q}^2-(\mathbf{aq})^2}}-\dot{\lambda}=0.$$

Der Vergleich mit (14) zeigt, daß wir dafür

$$D\cdot\sqrt{\mathbf{q}^2-(\mathbf{aq})^2}-\dot{\lambda}=0$$

schreiben können. Da aber

$$\sqrt{\mathbf{q}^2 - (\mathbf{aq})^2}\, dt = \sqrt{\dot{\mathbf{a}}^2}\, dt = ds$$

das Bogenelement des sphärischen Bildes von $\mathfrak{A}$ ist, finden wir

$$L_c = \oint D\, ds = \lambda_T - \lambda_0. \tag{18}$$

Satz 3: *Die Öffnungsstrecke* L_c *der Zentraltangentenfläche* $\mathfrak{C}$ *ist gleich dem Periodenintegral des Dralls der Ausgangsregelfläche* $\mathfrak{A}$ *über das Bogenelement deren sphärischen Bildes.*

Es ist bemerkenswert, daß wir bei der Herleitung nicht davon Gebrauch gemacht haben, daß $\mathbf{x}$ Striktionspunkt von $\mathfrak{A}$ ist. (18) liefert also auch die Öffnungsstrecke für Regelflächen mit der Erzeugendenrichtung $\mathbf{c}$, die durch einen beliebigen Punkt $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mu\mathbf{a}$ für $\mu =$ konst. der Erzeugenden $(\mathbf{a}, \overline{\mathbf{a}})$ von $\mathfrak{A}$ hindurchgehen. $(\dot{\mathbf{a}}\mathbf{c} = 0)$.

Nun zur Ermittlung der *Öffnungsstrecken der Axiode* bei $\mathbf{B}_0$:

Die Achsenfläche in $\mathbf{R}$ wird gemäß (2) von $(\mathbf{p}, \overline{\mathbf{p}})$ beschrieben. Auf dieser Geraden wählen wir einen Punkt $\mathbf{z}$, für den also $\overline{\mathbf{p}} = \mathbf{z} \times \mathbf{p}$ ist. $\mathbf{z}$ durchläuft eine Querlinie auf dem *Gangaxoid,* wenn entsprechend (5) $\mathbf{p}\dot{\mathbf{z}}_r - \dot{\lambda} = 0$ gilt. Damit finden wir die Öffnungsstrecke

$$L_A = \oint \mathbf{p}\dot{\mathbf{z}}_r\, dt. \tag{19}$$

In $\mathbf{R}'$ gelangen wir ganz ähnlich zu

$$L_A' = \oint \mathbf{p}\dot{\mathbf{z}}_a\, dt,$$

wobei für die Absolutgeschwindigkeit noch $\dot{\mathbf{z}}_a = \dot{\mathbf{z}}_f + \dot{\mathbf{z}}_r$, also

$$\dot{\mathbf{z}}_a = \overline{\mathbf{q}} + \mathbf{q} \times \mathbf{z} + \dot{\mathbf{z}}_r$$

einzuführen ist:

$$L_A' = \oint \mathbf{p}\overline{\mathbf{q}}\, dt + \oint \mathbf{p}\dot{\mathbf{z}}_r\, dt \tag{20}$$

ist somit die *Öffnungsstrecke des Rastaxoids,* da $\mathbf{p}\,(\mathbf{q} \times \mathbf{z}) = 0$ beachtet wurde.

Als *Gesamtschiebstrecke* des geschlossenen Bewegungsvorgangs $\mathbf{B}_0$ gewinnen wir mit (2)

$$L_A' - L_A = \oint \mathbf{p}\overline{\mathbf{q}}\, dt = \oint k\, |\mathbf{q}|\, dt. \tag{21}$$

Hierbei wurde berücksichtigt, daß für die Momentanschraube $|\mathbf{q}|$ die Winkelgeschwindigkeit der Drehung und $k|\mathbf{q}|$ die Schiebgeschwindigkeit längs der Achse $(\mathbf{p}, \overline{\mathbf{p}})$ ist. Somit kann $k|\mathbf{q}|dt$ als Schiebstrecke in der Zeit dt aufgefaßt werden. Daraus folgt

Satz 4: *Die Differenz der Öffnungsstrecken der beiden Axoide ist gleich der Gesamtschiebstrecke des geschlossenen Bewegungsvorgangs.*

Die Öffnungsstrecke des Gangaxoids und damit auch die des Rastaxoids kann auch direkt berechnet werden: Als Punkt $\mathbf{z}$ auf $(\mathbf{p}, \overline{\mathbf{p}})$ können wir den Lotfußpunkt $\mathbf{z}_0$ aus dem

Ursprung U des Gangkreuzes wählen. Aus $\mathbf{z}_0 = \mathbf{p} \times \overline{\mathbf{p}}$ folgt $\dot{\mathbf{z}}_{0r} = \dot{\mathbf{p}}_r \times \overline{\mathbf{p}} + \mathbf{p} \times \dot{\overline{\mathbf{p}}}_r$ und damit für die Querlinie $\mathbf{p}\dot{\mathbf{z}}_{0r} = (\mathbf{p}\dot{\mathbf{p}}_r\overline{\mathbf{p}})$ und daher mit (2)

$$L_A = \oint (\mathbf{p}\dot{\mathbf{p}}_r\overline{\mathbf{p}})\,dt = \oint \frac{(\mathbf{q}\dot{\mathbf{q}}_r\overline{\mathbf{q}})}{(\dot{\mathbf{q}}_r^2)^{3/2}}\,dt. \tag{22}$$

IV.

Gewissermaßen als duales Gegenstück (Rudimente der projektiven Dualität in der euklidischen Geometrie) hatte ich in [10] den *Öffnungswinkel* einer geschlossenen Regelfläche definiert: Umschreibt man einer geschlossenen Regelfläche so eine Torse, daß deren Erzeugenden jeweils auf den Erzeugenden der Ausgangsfläche senkrecht stehen, so schließt sich im allgemeinen die Torse bei einem Umlauf um die geschlossene Regelfläche nicht. Die einhüllende Ebene der Torse kehrt, unter dem Öffnungswinkel Λ gegen ihre Ausgangslage geneigt, zur Ausgangserzeugenden zurück. Λ ist ebenfalls eine Integralinvariante der Regelfläche und unabhängig von der Wahl der Ausgangslage der Ebene und der Erzeugenden.

$(\mathbf{g}, \overline{\mathbf{g}})$ sei Erzeugende der Torse $\mathfrak{G}$, die der Regelfläche $\mathfrak{A}$ umschrieben wird. Die Erzeugenden von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{A}$ schneiden sich für $\mathbf{a}\mathbf{g} = 0$ senkrecht. φ sei der Winkel, unter dem die Erzeugende von $\mathfrak{G}$ gegen die Zentraltangente von $\mathfrak{A}$ geneigt ist. Daher der Ansatz

$$\mathbf{g} = \mathbf{b} \sin\varphi + \mathbf{c} \cos\varphi.$$

Daraus mit Hilfe von (10)

$$\dot{\mathbf{g}} = -\mathbf{a}\varkappa \sin\varphi + (\dot{\varphi} - \tau)\,(\mathbf{b}\cos\varphi - \mathbf{c}\sin\varphi).$$

Für eine Torse ist kennzeichnend: 1) Eine Tangentialebene der Torse berührt diese in sämtlichen Punkten der in ihr liegenden Erzeugenden. und 2) Benachbarte Erzeugende der Torse schneiden sich in Punkten der Gratlinie.

Da sich $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{G}$ berühren sollen, müssen sie im jeweiligen Berührungspunkt gleiche Normalenrichtungen aufweisen, d.h. aber die Normalenrichtung von $\mathfrak{A}$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{g} = \mathbf{b}\cos\varphi - \mathbf{c}\sin\varphi$$

und die Normalenrichtung von $\mathfrak{G}$

$$\mathbf{g} \times \dot{\mathbf{g}} = -\mathbf{a}\,(\dot{\varphi} - \tau) - (\mathbf{b}\cos\varphi - \mathbf{c}\sin\varphi)\,\varkappa\sin\varphi$$

müssen bis auf einen skalaren Faktor übereinstimmen, womit wir zu $\dot{\varphi} - \tau = 0$ gelangen. Aus (10) und (13) erhalten wir

$$\tau = \frac{(\mathbf{a}\dot{\mathbf{a}}\ddot{\mathbf{a}})}{\dot{\mathbf{a}}^2} = \mathbf{a}\mathbf{q}. \tag{23}$$

Somit ist der Öffnungswinkel bis auf Vielfache von 2π gleich

$$\Lambda_a = \oint \dot{\varphi}\,dt = \mathbf{a}\oint \mathbf{q}\,\mathbf{dt} = \mathbf{a}\mathbf{K} = \varphi_T - \varphi_0 \tag{24}$$

Ist also zu Beginn ($t=0$) von $\mathbf{B}_0$ die Gerade g – wir bezeichnen sie kurz mit g_0 – unter dem Winkel φ_0 gegen **c** geneigt, so kehrt sie als g_T nach einer Periodenänderung ($t=T$), unter dem Winkel Λ_a gegen **c** geneigt, zurück. Da aber $\mathbf{a}_0=\mathbf{a}_T$ und $\mathbf{c}_0=\mathbf{c}_T$, sowie $\mathbf{a}_0\mathbf{g}_0=0$, $\mathbf{a}_T\mathbf{g}_T=0$, ist also Λ_a der Winkel, den die Tangentialebenen von $\mathfrak{G}$ zu Anfang und Ende von $\mathbf{B}_0$ einschließen.

Satz 5: *Der Öffnungswinkel der Bahnfläche, die bei einem geschlossenen Bewegungsvorgang* $\mathbf{B}_0$ *von der Geraden* $(\mathbf{a},\bar{\mathbf{a}})$ *des Gangraums* **R** *erzeugt wird, ist gleich der Normalprojektion des Vektors* **K** *der Koenigsschraube auf die Richtung von* **a**. *Alle Geraden* $(\mathbf{a},\bar{\mathbf{a}})$ *von* **R**, *die bei* $\mathbf{B}_0$ *zum gleichen Öffnungswinkel der erzeugten Regelflächen* $\mathfrak{A}$ *führen, schließen mit der Koenigsschraube, d.h. deren Achse*[3]) *den gleichen Winkel ein. Die* $\mathfrak{A}$ *umschriebene Torse* $\mathfrak{G}$ *schließt sich, wenn* **a** *auf* **K** *senkrecht steht.*

Es sei noch vermerkt, daß der Öffnungswinkel nur vom sphärischen Bild von $\mathfrak{A}$ abhängt.

Nun noch zu den Öffnungswinkeln der begleitenden Regelflächen:

1) Für die *Zentralnormalenfläche* $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ gehen wir in ähnlicher Weise vor. Wir setzen $\mathbf{g}=\mathbf{c}\sin\psi+\mathbf{a}\cos\psi$, bilden $\dot{\mathbf{g}}$ und fordern, daß $\mathbf{b}\times\mathbf{g}=\mathbf{a}\sin\psi-\mathbf{c}\cos\psi$, sowie

$$\mathbf{g}\times\dot{\mathbf{g}}=-\mathbf{b}\dot{\psi}-(\varkappa\cos\psi-\tau\sin\psi)\,(\mathbf{a}\sin\psi-\mathbf{c}\cos\psi)$$

bis auf einen Zahlenfaktor übereinstimmen, woraus $\dot{\psi}=0$, somit $\psi=\text{konst.}$, $\Lambda_b=0$ folgt.

Satz 6: *Die Öffnungswinkel der Zentralnormalenflächen geschlossener Regelflächen verschwinden, die umschriebenen Torsen schließen sich.*

2) Für die *Zentraltangentenfläche* $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{A}$ führt der Ansatz $\mathbf{g}=\mathbf{a}\sin\chi+\mathbf{b}\cos\chi$ auf dem gleichen Wege zu

$$\dot{\chi}=\varkappa=\sqrt{\dot{\mathbf{a}}^2}=\sqrt{\mathbf{q}^2-(\mathbf{aq})^2}.$$

Daher ist

$$\Lambda_c=\oint\varkappa\,dt=\oint ds=s_T-s_0. \tag{25}$$

Satz 7: *Der Öffnungswinkel der Zentraltangentenfläche einer geschlossenen Regelfläche ist gleich der Bogenlänge (Umfang) des sphärischen Bildes der Ausgangsfläche.*

Nun zu den schrotenden Axoiden von $\mathbf{B}_0$:

Da $|\mathbf{q}|$ die Winkelgeschwindigkeit der Drehung von **R** gegenüber **R**′, also $|\mathbf{q}|\,dt$ der infinitesimale Winkel der Momentanschraubung ist, gilt

---

[3]) Die Achse der Koenigsschraube $(\mathbf{K},\bar{\mathbf{K}})$ kann gemäß (2) gefunden werden.

***Satz 8:** Die Differenz der Öffnungswinkel der beiden Axoide ist gleich der Gesamtdrehung von $\mathbf{B}_0$, also ein ganzzahliges Vielfaches von 2π. Ist* n *die Drehzahl von $\mathbf{B}_0$, dann ist*

$$\Lambda_A' - \Lambda_A = \oint |\mathbf{q}|\, dt = 2n\pi. \tag{26}$$

Im einzelnen führen wir beim *Gangaxoid* für die ihm umschriebene Torse wieder den Winkel φ ein, den die Torsenerzeugende mit der Zentraltangente des Axoides einschließt. Bei gleichem Vorgehen wie früher gelangen wir zu der (23) entsprechenden Formel

$$\dot{\varphi} = \frac{(\mathbf{p}\,\dot{\mathbf{p}}_r\,\ddot{\mathbf{p}}_r)}{\dot{\mathbf{p}}_r^2}$$

und damit zum Öffnungswinkel des *Gangaxoids:*

$$\Lambda_A = \oint \frac{(\mathbf{p}\,\dot{\mathbf{p}}_r\,\ddot{\mathbf{p}}_r)}{\dot{\mathbf{p}}_r^2}\, dt. \tag{27}$$

Für das *Rastaxoid* sind in

$$\Lambda_A' = \oint \frac{(\mathbf{p}\,\dot{\mathbf{p}}_a\,\ddot{\mathbf{p}}_a)}{\dot{\mathbf{p}}_a^2}\, dt \tag{28}$$

die Werte für $\dot{\mathbf{p}}_a$ und $\ddot{\mathbf{p}}_a$, nämlich

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_a &= \dot{\mathbf{p}}_f + \dot{\mathbf{p}}_r = \mathbf{q} \times \mathbf{p} + \dot{\mathbf{p}}_r = \dot{\mathbf{p}}_r, \\ \ddot{\mathbf{p}}_a &= \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{p}}_r) = \mathbf{q} \times \dot{\mathbf{p}}_r + \ddot{\mathbf{p}}_r \end{aligned} \tag{29}$$

einzusetzen. Da

$$\begin{aligned} &(\mathbf{p}\,\dot{\mathbf{p}}_a\,\ddot{\mathbf{p}}_a) = (\mathbf{p}\,\dot{\mathbf{p}}_r\,(\mathbf{q}\times\dot{\mathbf{p}}_r)) + (\mathbf{p}\,\dot{\mathbf{p}}_r\,\ddot{\mathbf{p}}_r), \\ &(\mathbf{p}\,\dot{\mathbf{p}}_r\,(\mathbf{q}\times\dot{\mathbf{p}}_r)) = (\mathbf{p}\times\dot{\mathbf{p}}_r)\,(\mathbf{q}\times\dot{\mathbf{p}}_r) = (\mathbf{pq})\,\dot{\mathbf{p}}_r^2 \text{ und } \mathbf{pq} = |\mathbf{q}| \end{aligned}$$

ist, finden wir schließlich mit (27),(28)

$$\Lambda_A' = \oint |\mathbf{q}|\, dt + \oint \frac{(\mathbf{p}\,\dot{\mathbf{p}}_r\,\ddot{\mathbf{p}}_r)}{\dot{\mathbf{p}}_r^2}\, dt = \oint |\mathbf{q}|\, dt + \Lambda_A. \tag{30}$$

Für die Differenz $\Lambda_A' - \Lambda_A$ wird somit (26) bestätigt.

Die Integrale in (24),(27) und (28) können wegen (23) natürlich auch als Gesamttorsionen von $\mathfrak{A}$ bzw. der beiden Axoide gedeutet werden, ebenso Λ_c in (25) als Gesamtkrümmung.

Literaturverzeichnis

[1] *W. Blaschke:* Vorlesungen über Differentialgeometrie. 4. Aufl., Berlin 1945.

[2] *W. Blaschke:* Consideraciones sobre cinematica. Publ. del Istit. de mat de la Univ. Nacional Rosario Argentina 6 (1946), 179–182.

[3] *W. Haack:* Differentialgeometrie II. Wolfenbüttel-Hannover 1948.
[4] *J. Hoschek:* Integralinvarianten von Regelflächen. Arch. Math. 24 (1973), 218–224.
[5] *J. Hoschek:* Globale Geometrie der Regelflächen. Contributions to Geometry (Eds.: Tölke-Wills), Basel (1979).
[6] *G. Koenigs:* Sur la détermination générale du volume engendré par un contour fermé. Liouvilles Journ. (4) 5 (1889), 321–343.
[7] *E. Kruppa:* Zur Differentialgeometrie der Strahlflächen und Raumkurven. S. Ber. Akad. Wiss. Wien, Kl. IIa 157 (1949), 143–176.
[8] *E. Kruppa:* Analytische und konstruktive Differentialgeometrie. Wien 1957.
[9] *H.R. Müller:* Kinematik. Samml. Göschen 584/584a, Berlin 1963.
[10] *H.R. Müller:* Über geschlossene Bewegungsvorgänge. Monatsh. Math. 55 (1951), 206–214.
[11] *H. Pottmann:* Die Öffnungsstrecken der Bahnregelflächen geschlossener räumlicher äquiformer Zwangläufe. Monatsh. Math. 101 (1986), 317–326.
[12] *H. Pottmann:* Zur globalen Raumkinematik. Monatsh. Math. 103 (1987), 289–302.